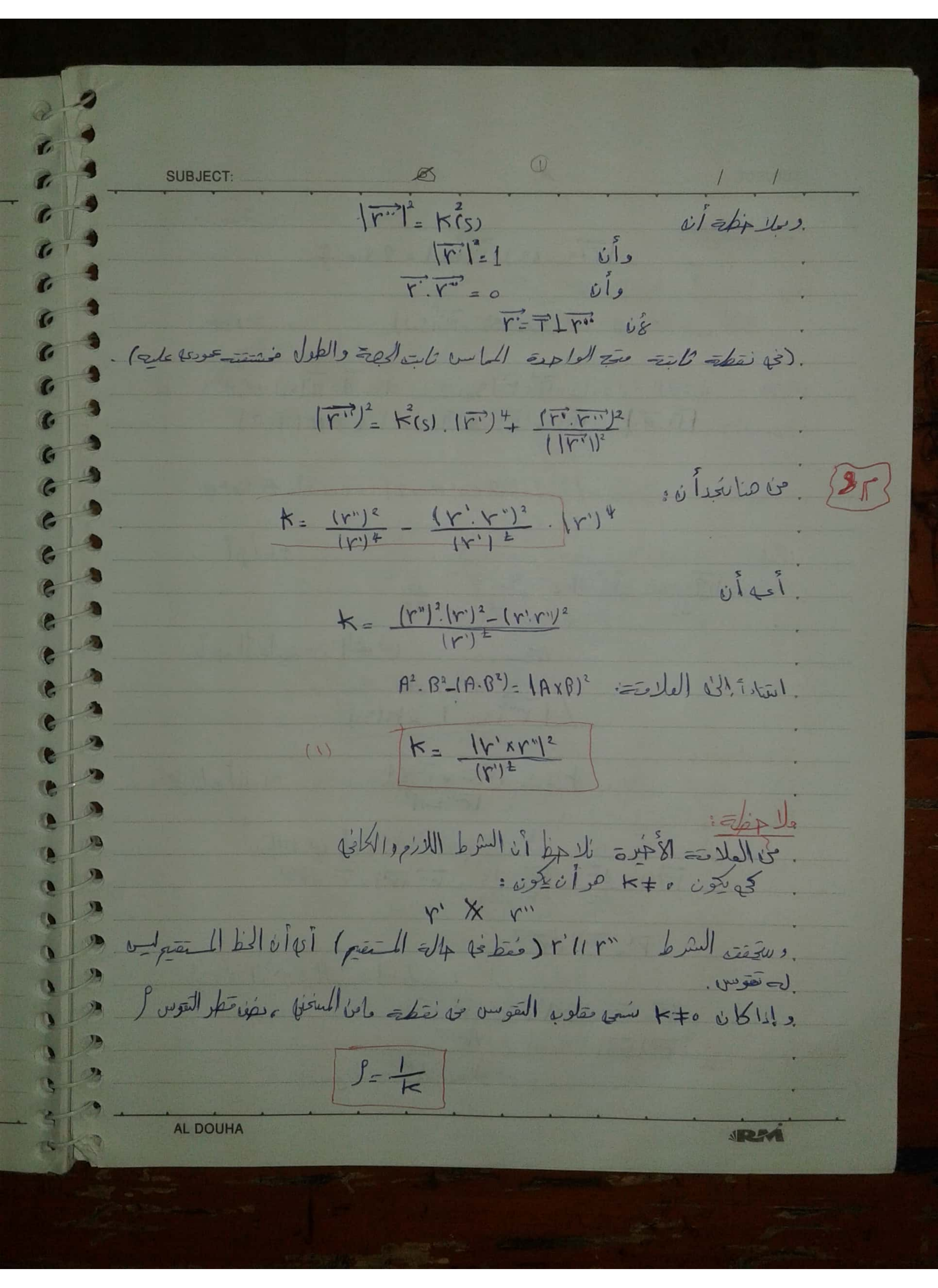


وبملاحظة أن $|\vec{r''}|^2 = k^2(s)$

وأن $|\vec{r'}|^2 = 1$

وأن $\vec{r'}\cdot\vec{r''} = 0$

أي $\vec{r'} = \vec{T} \perp \vec{r''}$

(في نقطة ثابتة متجه الواحدة المماس ثابت الجهة والطول فمشتقه عمودي عليه).

$$(|\vec{r''}|)^2 = k^2(s)\cdot(|\vec{r'}|)^4 + \frac{(\vec{r'}\cdot\vec{r''})^2}{(|\vec{r'}|)^2}$$

من هنا نجد أن: ٣ع

$$k = \frac{(r'')^2}{(r')^4} - \frac{(r'\cdot r'')^2}{(r')^6} \cdot (r')^4$$

أي أن

$$k = \frac{(r'')^2\cdot(r')^2 - (r'\cdot r'')^2}{(r')^6}$$

استناداً إلى العلاقة: $A^2\cdot B^2 - (A\cdot B^2) = |A\times B|^2$

$$k = \frac{|r'\times r''|^2}{(r')^6} \qquad (1)$$

ملاحظة:

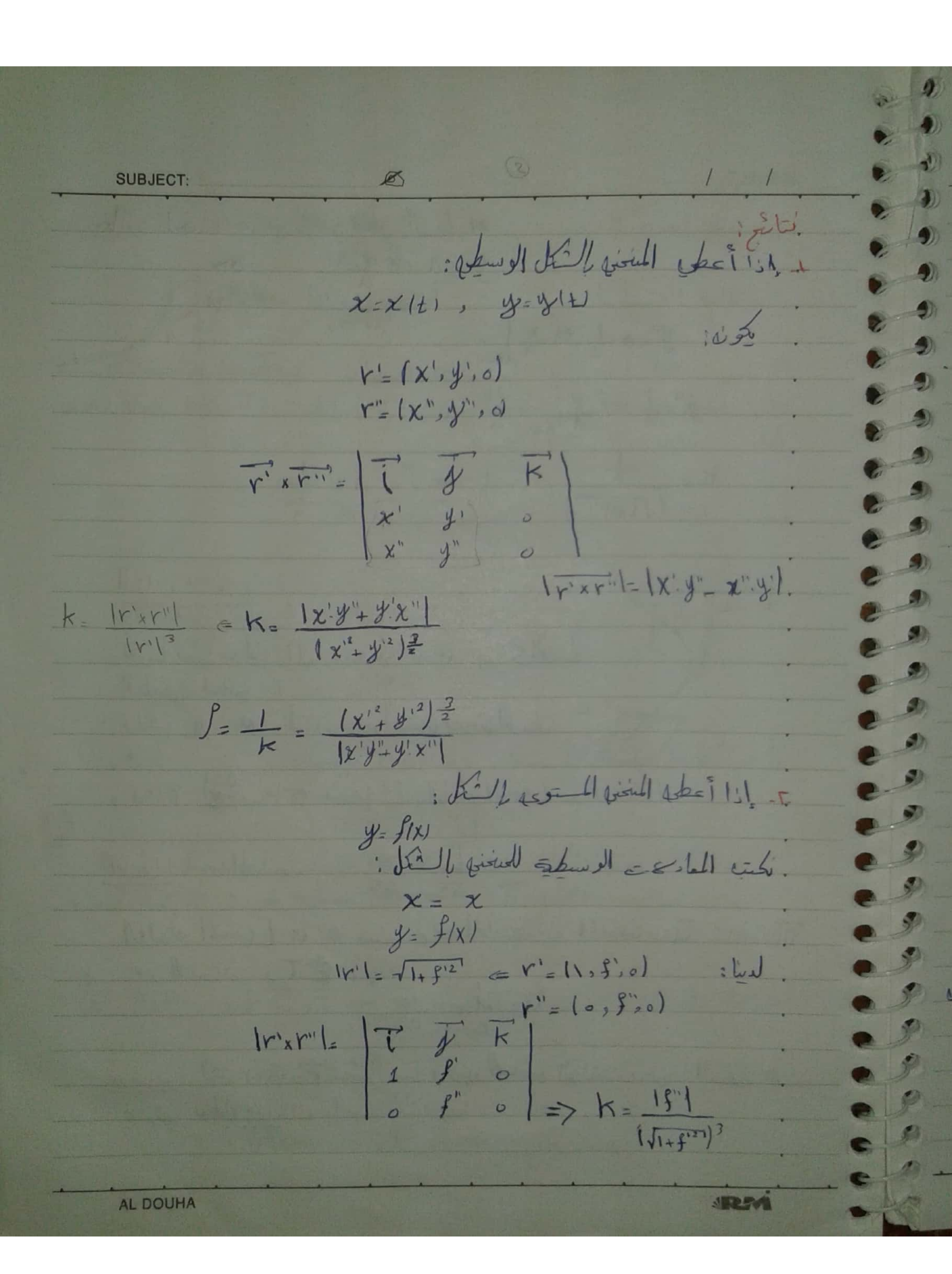
من العلاقة الأخيرة نلاحظ أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $k \neq 0$ هو أن يكون:

$$r' \not\parallel r''$$

ويتحقق الشرط $r' \parallel r''$ (فقط في حالة المستقيم) أي أن الخط المستقيم ليس له تقوس.

وإذا كان $k \neq 0$ نسمي مقلوب التقوس في نقطة ما من المنحني بنصف قطر التقوس ρ

$$\rho = \frac{1}{k}$$



SUBJECT:

نتائج:

1- إذا أعطي المنحني بالشكل الوسيطي:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t)$$

يكون:

$$r' = (x', y', 0)$$
$$r'' = (x'', y'', 0)$$

$$\vec{r'} \times \vec{r''} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \end{vmatrix}$$

$$|\vec{r'} \times \vec{r''}| = |x' \cdot y'' - x'' \cdot y'|$$

$$k = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3} \Leftarrow k = \frac{|x' y'' + y' x''|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x' y'' + y' x''|}$$

2- إذا أعطي المنحني المستوي بالشكل:

$$y = f(x)$$

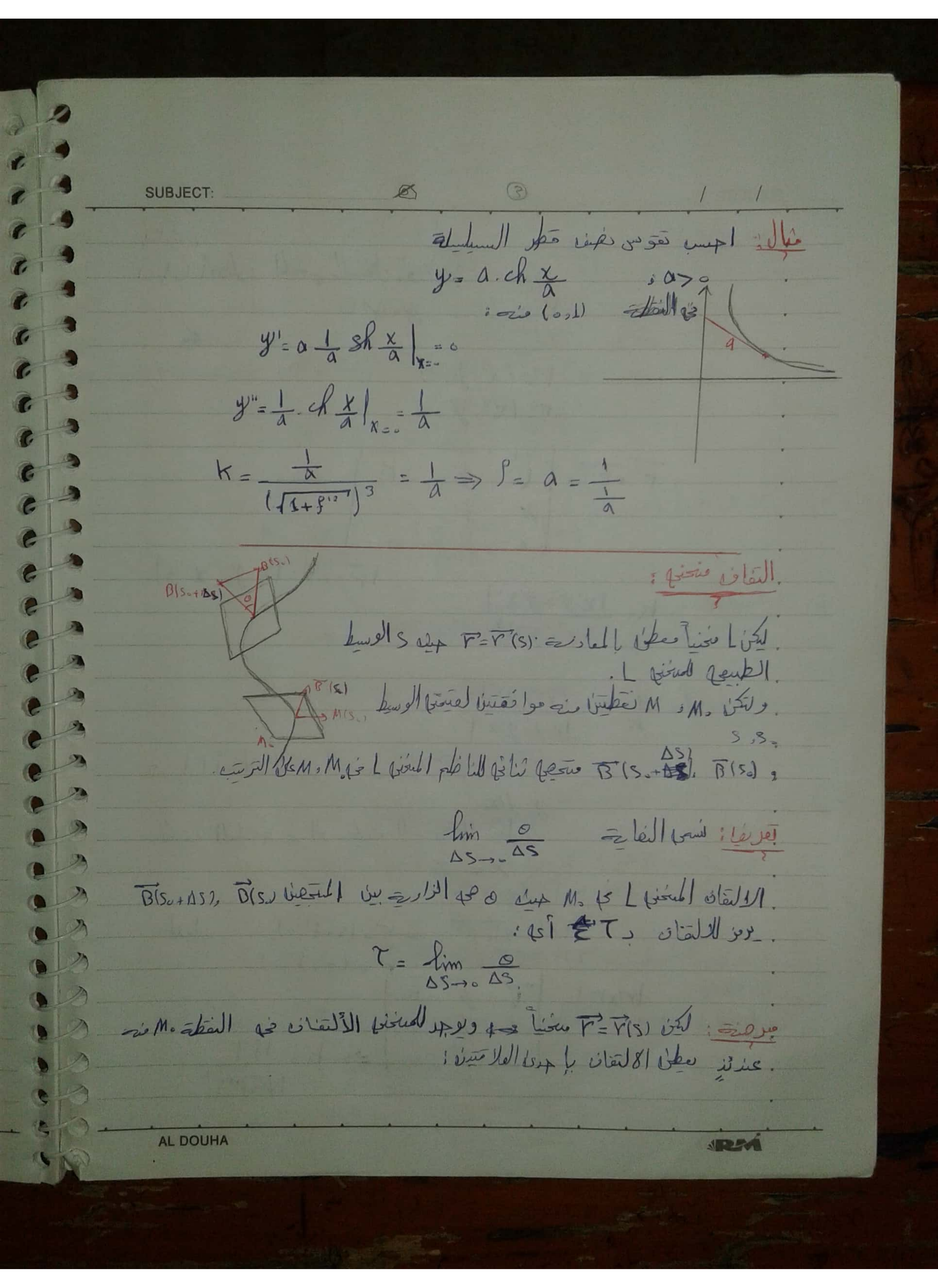
نكتب المعادلات الوسيطية للمنحني بالشكل:

$$x = x$$
$$y = f(x)$$

لدينا: $r' = (1, f', 0) \Rightarrow |r'| = \sqrt{1 + f'^2}$

$$r'' = (0, f'', 0)$$

$$|r' \times r''| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & f' & 0 \\ 0 & f'' & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow k = \frac{|f''|}{(\sqrt{1 + f'^2})^3}$$



مثال: احسب تقوس نصف قطر السلسلية

$y = a \cdot ch\frac{x}{a}$ ، $a>0$ في النقطة $(0,a)$ منه:

$$y' = a\frac{1}{a}\, sh\frac{x}{a}\Big|_{x=0} = 0$$

$$y'' = \frac{1}{a}\cdot ch\frac{x}{a}\Big|_{x=0} = \frac{1}{a}$$

$$k = \frac{\frac{1}{a}}{\left(\sqrt{1+f'^2}\right)^3} = \frac{1}{a} \Rightarrow \rho = a = \frac{1}{\frac{1}{a}}$$

التفاف منحني:

ليكن L منحنياً معطى بالمعادلة: $\vec{r}=\vec{r}(s)$ حيث s الوسيط الطبيعي للمنحني L.

ولتكن M_0 و M نقطتين منه موافقتين لقيمتي الوسيط s_0, s

و $\vec{B}(s_0)$، $\vec{B}(s_0+\Delta s)$ متجهي ثنائي الناظم للمنحني L في M_0، M على الترتيب.

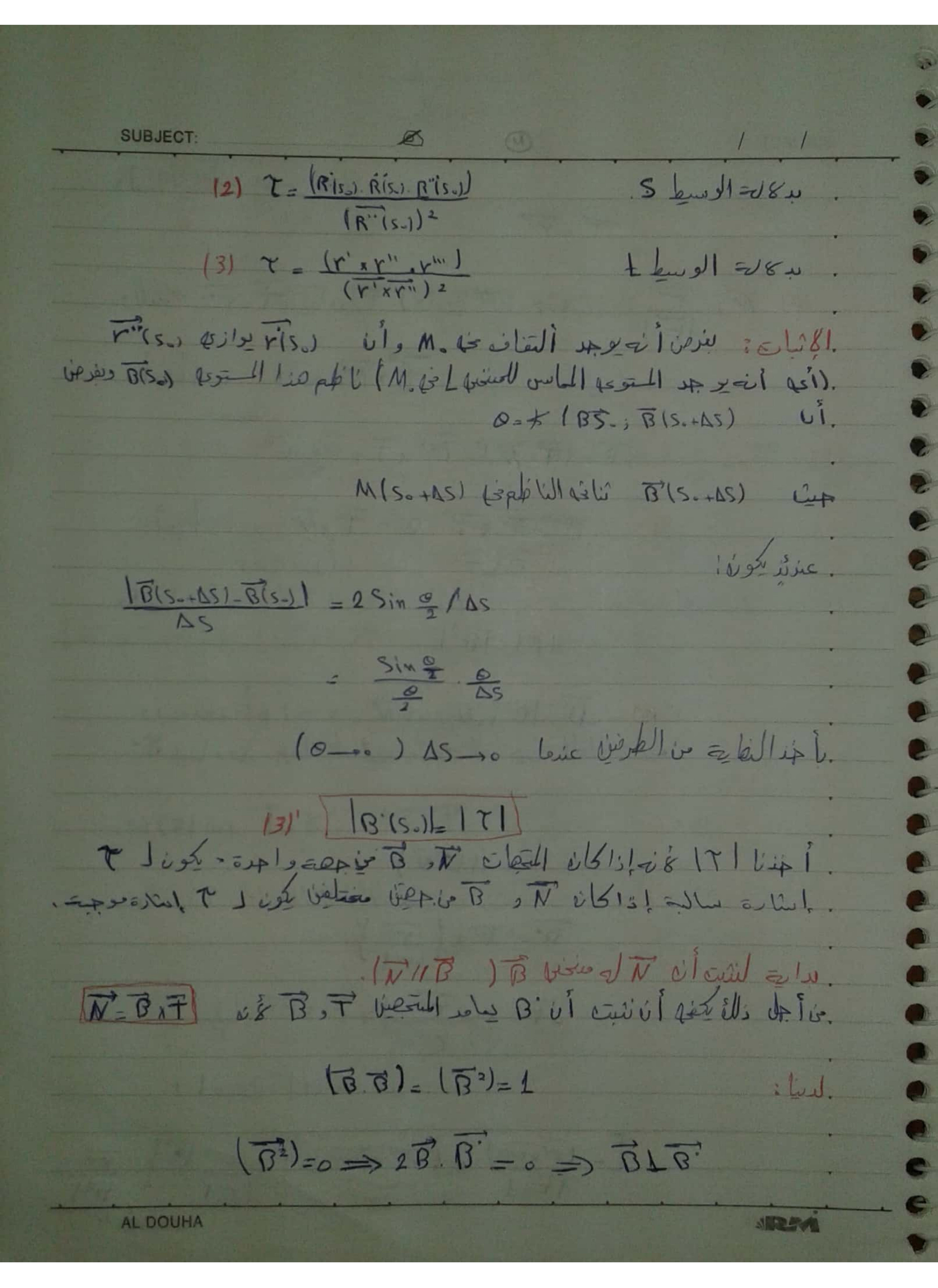
تعريف: نسمي النهاية $\lim\limits_{\Delta s\to 0} \frac{\theta}{\Delta s}$

الالتفاف للمنحني L في M_0 حيث θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{B}(s_0)$, $\vec{B}(s_0+\Delta s)$

يرمز للالتفاف بـ τ أي:

$$\tau = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\theta}{\Delta s}$$

مبرهنة: ليكن $\vec{r}=\vec{r}(s)$ منحنياً ويوجد للمنحني الالتفاف في النقطة M_0 منه عندئذٍ يعطى الالتفاف بإحدى العلاقتين:



. بدلالة الوسيط S (2) $\tau = \frac{(\vec R'(s_0).\vec R''(s_0).\vec R'''(s_0))}{(\vec R''(s_0))^2}$

. بدلالة الوسيط t (3) $\tau = \frac{(r' \times r'' . r''')}{(r' \times r'')^2}$

.الإثبات: بفرض أنه يوجد التفاف نحو M_0 وأن $\vec r'(s_0)$ يوازي $\vec r'''(s_0)$

.(أي أنه يوجد المستوي الماس للمنحني L في M_0) ناظم هذا المستوي $\vec B(s_0)$ ونفرض

.أن $\theta = \measuredangle(\vec B s_0 ; \vec B(s_0+\Delta s))$

حيث $\vec B(s_0+\Delta s)$ ثنائي الناظم في $M(s_0+\Delta s)$

.عندئذٍ يكون:

$$\frac{|\vec B(s_0+\Delta s) - \vec B(s_0)|}{\Delta s} = 2\sin\frac{\theta}{2} / \Delta s$$

$$= \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{\theta}{\Delta s}$$

.بأخذ النهاية من الطرفين عندما $\Delta s \to 0$ $(\theta \to 0)$

(3)' $|\vec B'(s_0)| = |\tau|$

. أخذنا $|\tau|$ لأنه إذا كان المتجهان $\vec N$, $\vec B$ في جهة واحدة. يكون لـ τ

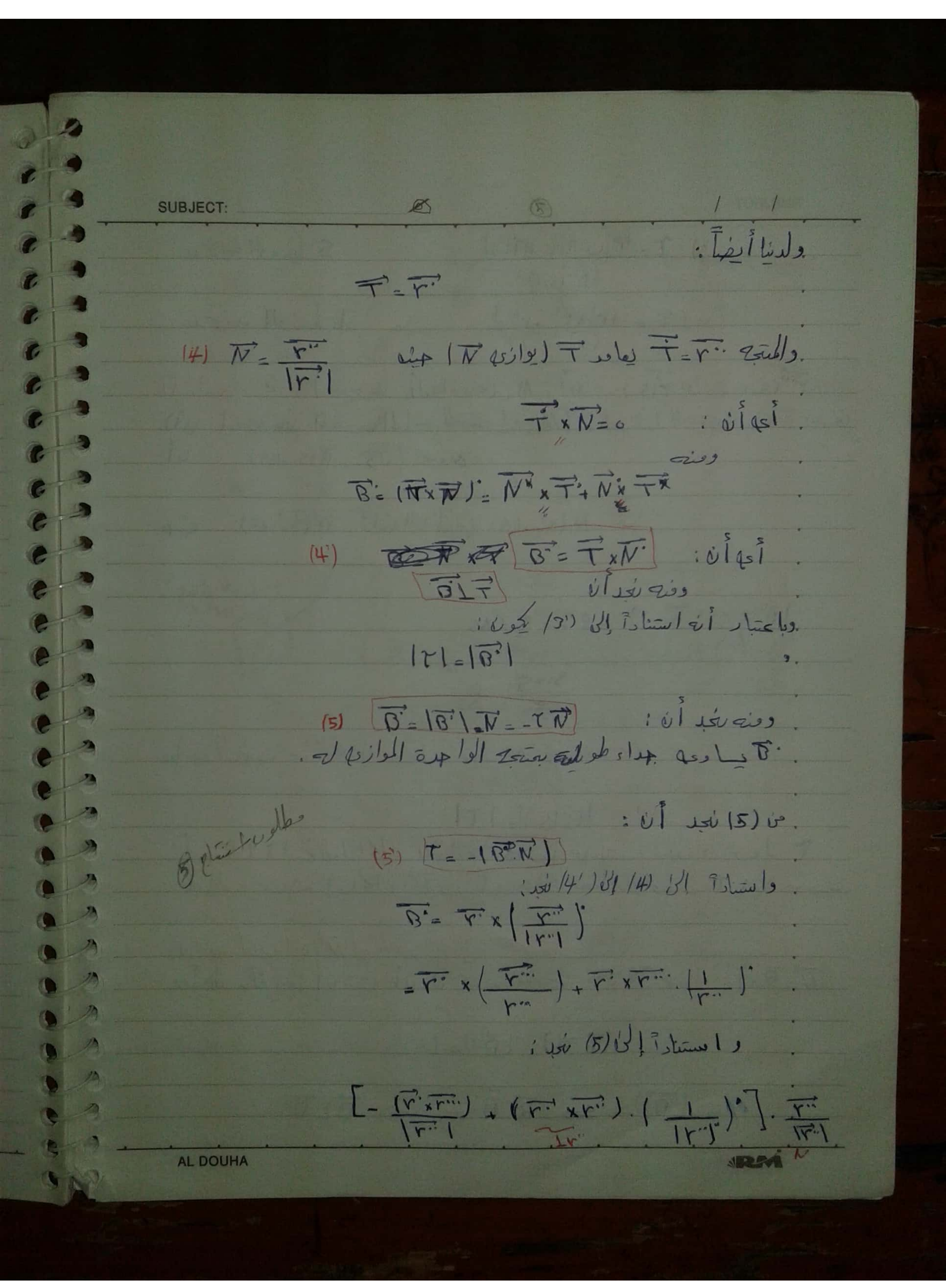
. إشارة سالبة. إذا كان $\vec N$ و $\vec B$ في جهتين مختلفين يكون لـ τ إشارة موجبة.

.بداية لنثبت أن $\vec N$ له منحى $\vec B$ ($\vec N \parallel \vec B'$).

.من أجل ذلك يكفي أن نثبت أن $\vec B'$ يعامد المتجهين $\vec T$, $\vec B$ لأنه $\vec N = \vec B \wedge \vec T$

.لدينا: $(\vec B.\vec B) = (\vec B^2) = 1$

$$(\vec B^2)' = 0 \Rightarrow 2\vec B.\vec B' = 0 \Rightarrow \vec B \perp \vec B'$$



ولدينا أيضاً:

$$\vec{T} = \vec{r}'$$

والمتجه $\vec{T}' = \vec{r}''$ يعامد $\vec{T}$ (يوازي $\vec{N}$) حيث

(4) $\vec{N} = \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}''|}$

أي أن: $\vec{T}' \times \vec{N} = 0$

ومنه

$$\vec{B}' = (\vec{T} \times \vec{N})' = \vec{T}' \times \vec{N} + \vec{T} \times \vec{N}'$$

أي أن: (4') $\vec{B}' = \vec{T} \times \vec{N}'$

ومنه نجد أن $\vec{B}' \perp \vec{T}$

وباعتبار أنه استناداً إلى (3') يكون:

$$|\tau| = |\vec{B}'|$$

ومنه نجد أن: (5) $\vec{B}' = |\vec{B}'|\vec{N} = -\tau \vec{N}$

$\vec{B}'$ يساوي جداء طويلة بمتجه الواحدة الموازي له.

من (5) نجد أن:

مطلوب استنتاج (5)

(5') $\tau = -(\vec{B}' \cdot \vec{N})$

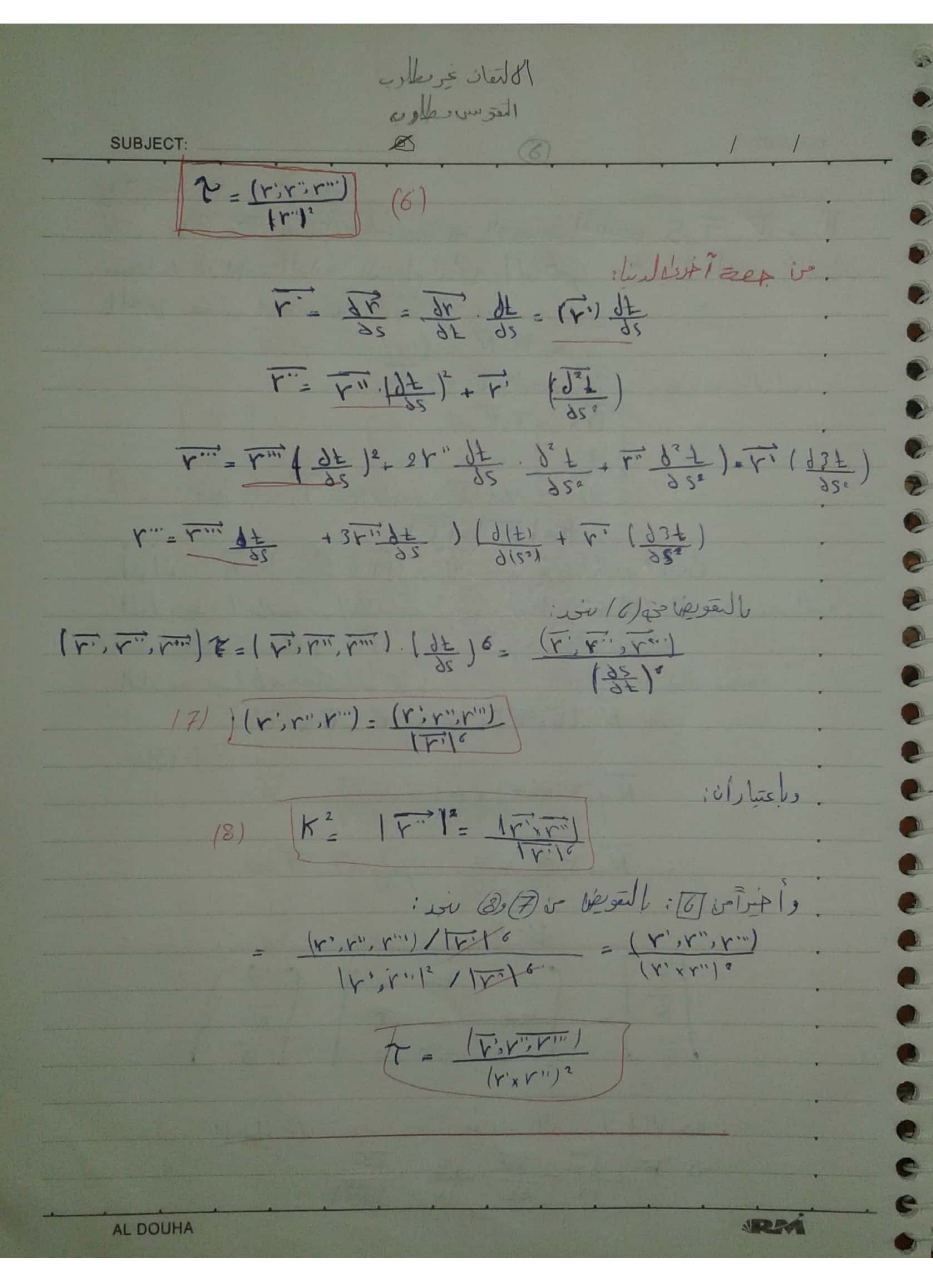
واستناداً إلى (4) إلى (4') نجد:

$$\vec{B}' = \vec{r}' \times \left(\frac{\vec{r}''}{|\vec{r}''|}\right)'$$

$$= \vec{r}' \times \left(\frac{\vec{r}'''}{r''}\right) + \vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \left(\frac{1}{r''}\right)'$$

واستناداً إلى (5) نجد:

$$\left[-\frac{(\vec{r}' \times \vec{r}''')}{|\vec{r}''|} + (\vec{r}' \times \vec{r}'') \cdot \left(\frac{1}{|\vec{r}''|}\right)'\right] \cdot \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}''|}$$



$$\tau = \frac{(r', r'', r''')}{|r''|^2} \quad (6)$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\vec{r'} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = (\vec{r'})\frac{dt}{ds}$$

$$\vec{r''} = \vec{r''}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \vec{r'}\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right)$$

$$\vec{r'''} = \vec{r'''}\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 2r''\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^2t}{ds^2} + \vec{r''}\frac{d^2t}{ds^2} + \vec{r'}\left(\frac{d^3t}{ds^3}\right)$$

$$r''' = \vec{r'''}\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3r''\frac{dt}{ds}\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right) + \vec{r'}\left(\frac{d^3t}{ds^3}\right)$$

بالتعويض في (6) نجد:

$$(\vec{r'}, \vec{r''}, \vec{r'''}) = (\vec{r'}, \vec{r''}, \vec{r'''})\left(\frac{dt}{ds}\right)^6 = \frac{(\vec{r'}, \vec{r''}, \vec{r'''})}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^6}$$

$$(7) \quad (r', r'', r''') = \frac{(r', r'', r''')}{|r'|^6}$$

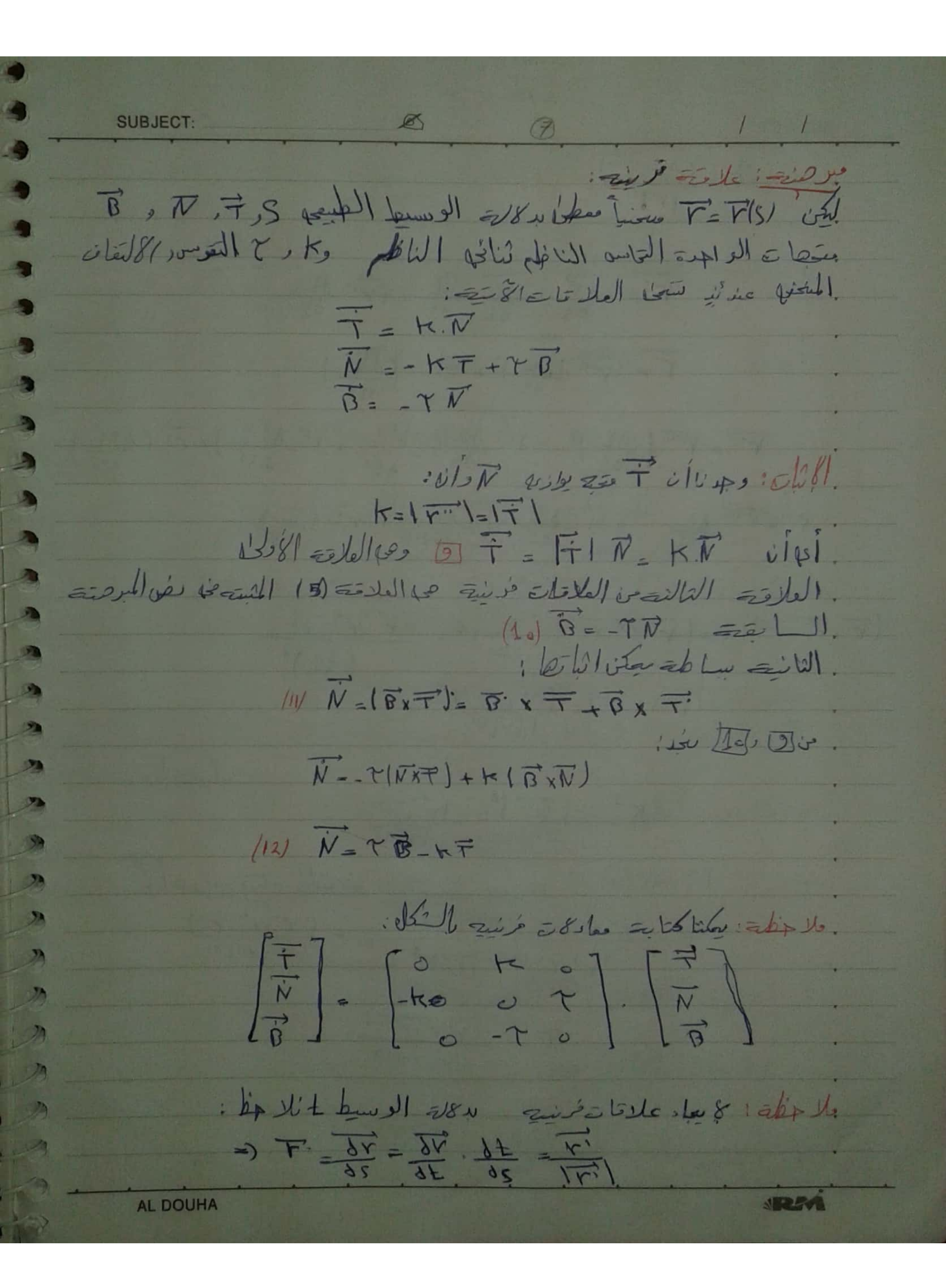
وباعتبار أن:

$$(8) \quad K^2 = |\vec{r''}|^2 = \frac{|\vec{r'} \times \vec{r''}|^2}{|r'|^6}$$

وأخيراً من [6]: بالتعويض من (7) و(8) نجد:

$$= \frac{(r', r'', r''') / |r'|^6}{|r' \times r''|^2 / |r'|^6} = \frac{(r', r'', r''')}{(r' \times r'')^2}$$

$$\tau = \frac{(\vec{r'}, \vec{r''}, \vec{r'''})}{(r' \times r'')^2}$$



مبرهنة: علاقة فرينيه:

ليكن $\vec{r} = \vec{r}(s)$ منحنياً معطىً بدلالة الوسيط الطبيعي s، $\vec{T}$، $\vec{N}$، و $\vec{B}$
متجهات الواحدة التماس الناظم ثنائي الناظم و k ، τ التقوس، الالتفاف
المنحني عندئذٍ تتحقق العلاقات الآتية:

$$\dot{\vec{T}} = k\vec{N}$$
$$\dot{\vec{N}} = -k\vec{T} + \tau\vec{B}$$
$$\dot{\vec{B}} = -\tau\vec{N}$$

الإثبات: وجدنا أن $\dot{\vec{T}}$ متجه يوازي $\vec{N}$ وأن:

$$k = |\vec{r}''| = |\dot{\vec{T}}|$$

أي أن $\dot{\vec{T}} = |\dot{\vec{T}}|\,\vec{N} = k\vec{N}$ (9) وهي العلاقة الأولى
العلاقة الثالثة من العلاقات فرينيه هي العلاقة (5) المثبتة في نص المبرهنة
السابقة $\dot{\vec{B}} = -\tau\vec{N}$ (10)
الثانية ببساطة يمكن اثباتها:

(11) $\dot{\vec{N}} = (\vec{B}\times\vec{T})^{\cdot} = \dot{\vec{B}}\times\vec{T} + \vec{B}\times\dot{\vec{T}}$

من (9) و (10) نجد:

$$\dot{\vec{N}} = -\tau(\vec{N}\times\vec{T}) + k(\vec{B}\times\vec{N})$$

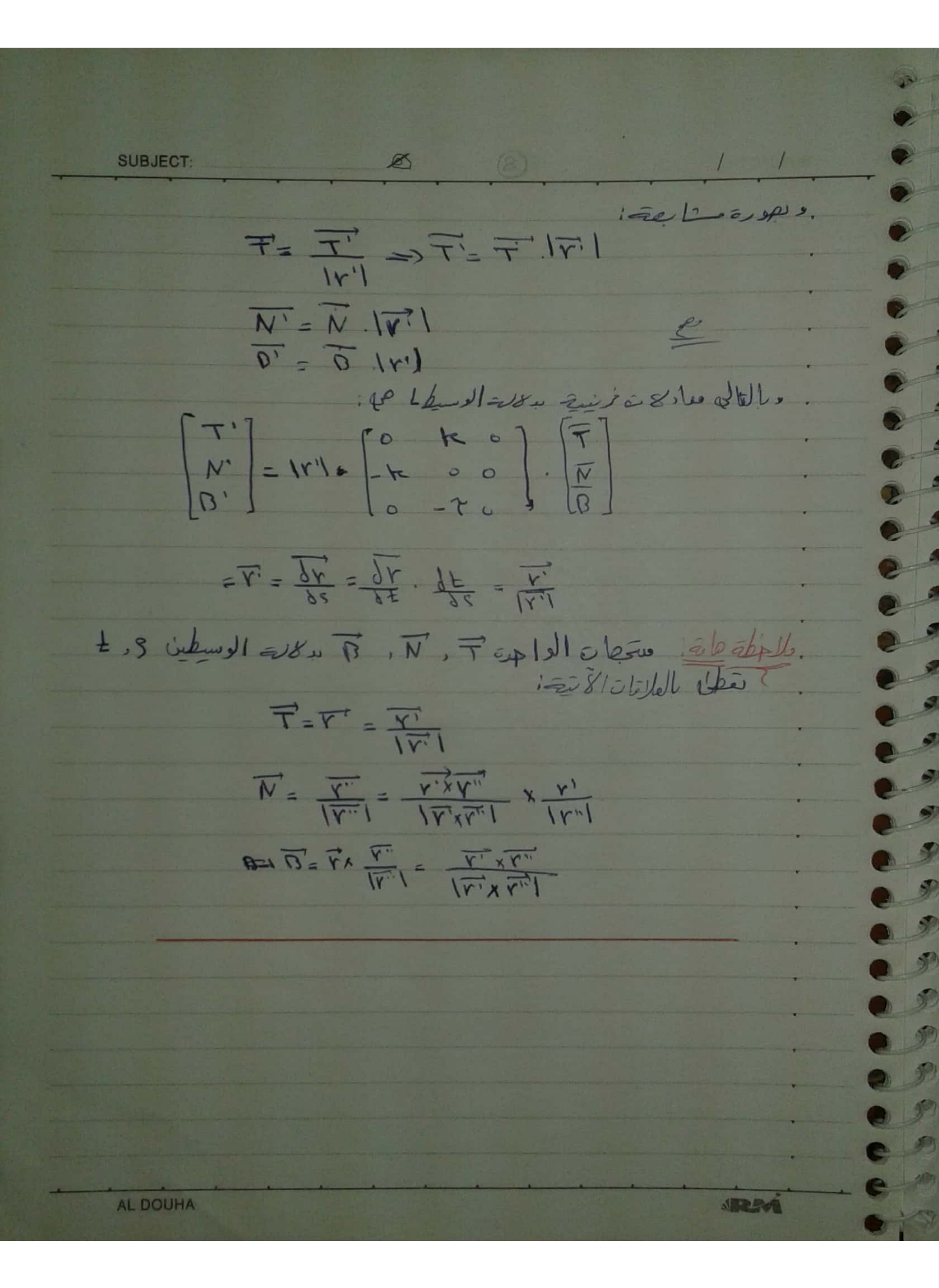
(12) $\dot{\vec{N}} = \tau\vec{B} - k\vec{T}$

ملاحظة: يمكننا كتابة معادلات فرينيه بالشكل:

$$\begin{bmatrix}\dot{\vec{T}}\\ \dot{\vec{N}}\\ \dot{\vec{B}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\vec{T}\\ \vec{N}\\ \vec{B}\end{bmatrix}$$

ملاحظة: لإيجاد علاقات فرينيه بدلالة الوسيط t نلاحظ:

$$\Rightarrow \vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}$$



SUBJECT: (8)   / /

وبصورة مشابهة:

$$\vec{T} = \frac{\vec{T'}}{|r'|} \Rightarrow \vec{T'} = \vec{T}\,|\vec{r'}|$$

$$\vec{N'} = \vec{N}\,.|\vec{r'}|$$

$$\vec{B'} = \vec{B}\,|r'|$$

مع

وبالتالي معادلات فرينية بدلالة الوسيط هي:

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = |r'| \cdot \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

$$= \vec{r'} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial s} = \frac{\vec{r'}}{|\vec{r'}|}$$

ملاحظة هامة: متجهات الواحدة $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ بدلالة الوسيطين s و t تعطى بالعلاقات الآتية:

$$\vec{T} = \vec{r'} = \frac{\vec{r'}}{|\vec{r'}|}$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{r''}}{|\vec{r''}|} = \frac{\vec{r'} \times \vec{r''}}{|\vec{r'} \times \vec{r''}|} \times \frac{r'}{|r''|}$$

$$\vec{B} = \vec{r'} \times \frac{\vec{r''}}{|\vec{r''}|} = \frac{\vec{r'} \times \vec{r''}}{|\vec{r'} \times \vec{r''}|}$$

AL DOUHA   RM

Scanned by CamScanner